

## UNIDAD 1

### INTRODUCCIÓN A LA SIMULACIÓN DE EVENTOS DISCRETOS

#### 1.1 Introducción

La simulación se puede definir como el acto de imitar un sistema real, de forma que se representen ciertas características o comportamientos clave del mismo. Es así que existen dos formas de simulación principales: real o computacional.

##### Simulación de eventos discretos

En este tipo de simulación se generan y administran eventos en el tiempo por medio de una cola de eventos ordenada según el tiempo de simulación en que deben ocurrir y de esta forma el simulador lee de la cola y dispara nuevos eventos. Entre otros un evento puede ser: la llegada de un cliente, la llegada de un camión, el inicio del proceso de una pieza, la finalización de un proceso de fabricación. Esta modalidad de simulación se usa típicamente en el diseño de la mayoría de eslabones de la cadena de suministro tales como: líneas de producción, plantas de procesamiento, bodegas de materia prima, bodegas de producto terminado, puntos de atención a clientes, hospitales, centros de atención médica.

Una variación importante de la simulación de eventos discretos es la simulación de agentes, en ella las entidades (tales como moléculas, células, árboles o consumidores) son representados directamente (en vez de representarse a través de sus densidades o cantidades), estos agentes poseen estados internos y conjuntos de comportamientos o reglas sencillas individuales que definen como son actualizados estos estados entre los diferentes puntos en el tiempo, definiendo así el comportamiento del conjunto de los agentes. Un ejemplo típico para este tipo de simulación es el de peatones en un evento de evacuación, para que dado unas reglas generales del comportamiento de movimiento de cada individuo se logre simular y determinar el tiempo de evacuación de todo el grupo de peatones dado un número de salidas en una locación determinada.

#### 1.2 Definiciones y aplicaciones

##### Enfoque de sistemas.

El enfoque de sistemas establece que "el mundo y cualquiera de sus partes puede visualizarse como un conjunto de sistemas en interacción dinámica". Es un punto de vista, una forma de pensar, que en la confrontación de una situación problemática, busca no ser reduccionista. Es decir visualizar la situación desde un punto en donde se consideren todos los elementos que intervienen en un problema.

##### Sistema.

Por sistema; se entiende una colección de entidades relacionadas, cada una de las cuales se caracteriza por atributos o características que pueden estar relacionados entre sí. Los objetivos que se persiguen al estudiar uno o varios fenómenos en función de un sistema son aprender cómo cambian los estados, predecir el cambio y controlarlo. Todo sistema consta de tres características. Tienen fronteras, existe dentro de un medio ambiente y tiene subsistemas. El medio ambiente es el conjunto de circunstancias dentro de las cuales está una situación problemática, mientras que las fronteras distinguen las entidades dentro de un sistema de las entidades que constituyen su medio ambiente. Por lo tanto podemos definir a un sistema como: "una estructura dinámica de personas, objetos y procedimientos organizados para el propósito de lograr ciertas funciones".

El conjunto de elementos que forman un sistema tiene las siguientes tres propiedades:

- Las propiedades o el comportamiento de cada elemento del conjunto tienen un efecto en las propiedades o el comportamiento del conjunto como un todo.
- Las propiedades y comportamiento de cada elemento y la forma en que se afectan al todo, dependen de las propiedades y comportamiento al menos de otro elemento en el conjunto. En consecuencia, no hay parte alguna que tenga un efecto independiente en el todo y cada una está afectada al menos por alguna otra.
- Cada subgrupo posible de elementos del conjunto tienen las dos primeras propiedades: cada uno tiene efecto no interdependiente en el total. En consecuencia no se puede descomponer el total en subconjuntos independientes. No se puede subdividir un sistema en subsistemas independientes.

Entidad.

Una entidad es algo que tiene realidad física u objetiva y distinción de ser o de carácter. Las entidades tienen ciertas propiedades que las distinguen a unas de otras.

Relación.

Relación es la manera en la cual dos o más entidades dependen entre sí. Relación es la unión que hay entre las propiedades de una o más entidades; por consiguiente, el cambio en alguna propiedad de una entidad ocasiona un cambio en una propiedad de otra entidad.

Estructura.

Una estructura es un conjunto de relaciones entre las entidades en la que cada entidad tiene una posición, en relación a las otras, dentro del sistema como un todo

Estado.

El estado de un sistema en un momento del tiempo, es el conjunto de propiedades relevantes que el sistema tiene en este momento. Cuando se habla del estado de un sistema, se entienden los valores de los atributos de sus entidades. Analizar un sistema supone estudiar sus cambios de estado conforme transcurre el tiempo.

Jerarquía De Sistemas.

- Subsistemas. Un subsistema es "Un elemento o componente funcional de un sistema mayor que tiene las condiciones de un sistema en sí mismo, pero que también tiene un papel en la operación de un sistema mayor"
- Supra sistema. El supra sistema es un sistema mayor a cuya función global el sistema está contribuyendo y del cual forma parte.
- Frontera. La frontera de un sistema representa el límite de acción en donde tiene autoridad la persona que toma decisiones en ese sistema. La frontera delimita lo que es y lo que no es el sistema.
- Ambiente. El ambiente de un sistema es todo lo que está situado fuera de su frontera.
- Sistema parcial. Un sistema parcial es una visión del sistema en la cual parte de las relaciones, aquellas que no son relevantes al aspecto del sistema que se está estudiando, son eliminadas.

### 1.3 Estructura y característica de la simulación de eventos discretos

#### Modelo de simulación de eventos discretos (MSED)

(Una aproximación a través de ejemplos enfocados al tratamiento de pacientes)

#### MSED y técnicas de simulación

Los MSED se utilizan para estudiar sistemas y procesos cuyo estado va cambiando con el tiempo de forma discreta, por lo que permiten conceptualizar el curso de una enfermedad y su manejo en términos de los eventos que pueden suceder durante el modelado, y cuyo impacto afecta tanto a los pacientes como a otros componentes del sistema (p. ej., el uso de recursos).

Estos modelos representan procesos y situaciones complejas, en función de los eventos que puedan ocurrir, por lo que pueden representar tanto situaciones clínicas (agudización de un proceso, descompensación patológica, aparición de una nueva situación clínica), como una determinada utilización de recursos sanitarios relacionados con dichas situaciones. Asimismo, las probabilidades de que ocurran cada uno de los eventos según se asocian con las características personales de los pacientes. Todos estos elementos, en conjunto, simulan la evolución natural de la enfermedad o proceso analizado, así como la historia de los pacientes cuya simulación se realiza en el modelo.

Por todo ello, y dado que en el mundo real es frecuente encontrarse con procesos y sistemas cuyo análisis, mediante métodos matemáticos, resulta extraordinariamente complejo o incluso imposible de llevar a cabo, el uso de MSED permite resolver problemas de esta índole. En tales circunstancias, la alternativa más eficaz para afrontar este tipo de estudios consiste en construir unos modelos lógico-matemáticos de forma que permitan imitar o simular el comportamiento del mundo real. Como resultado de repetir dicha simulación un número suficiente de veces, se obtendrá un histórico artificial de observaciones sobre el comportamiento del sistema o proceso. A partir de dichas observaciones, y utilizando técnicas de análisis estadístico, será posible extraer conclusiones sobre el funcionamiento de dicho sistema.

#### Etapas de los MSED

El diseño, el desarrollo y el análisis de resultados de una simulación es un proceso sofisticado, que requiere del analista unos mínimos conocimientos sobre programación, matemáticas, estadística, gestión de proyectos y también sobre el propio sistema estudiado.

La principal característica de un sistema de eventos discretos es que el sistema está determinado por una secuencia de eventos que ocurren en momentos aleatorios de tiempo  $t_1, t_2...$  y el cambio de estado del sistema tiene lugar en esos instantes. Los pacientes son las entidades del sistema y los diferentes eventos serán las visitas y cambios de estado de salud (respuesta) desde un nivel basal al final, tras la toma de un tratamiento farmacológico que modificará la fisiología del paciente o la aplicación de una tecnología sanitaria.

Cuando se escribe un programa de simulación para MSED se puede realizar una aproximación del esquema temporal de funcionamiento de las entidades en el sistema. Así, deberá describirse la secuencia de eventos y actividades que realizarán las entidades durante su estancia en el sistema y cómo se modificarán. Algunos de los sistemas más estudiados son los problemas de colas que se aplican en determinadas situaciones, como la espera que deben tener los pacientes entre visita y visita, si los centros donde son tratados no pueden absorber toda su demanda (p. ej., en un centro e instante de tiempo sólo puede ser tratado un paciente a la vez).

### 1.4 Sistemas, modelos y control

#### Concepto de Sistema

El concepto de sistema en general está sustentado sobre el hecho de que ningún sistema puede existir aislado completamente y siempre tendrá factores externos que lo rodean y pueden afectarlo, por lo tanto podemos referir a Muir citado en Puleo (1985) que dijo: "Cuando tratamos de tomar algo, siempre lo encontramos unido a algo más en el Universo".

Puleo define sistema como "un conjunto de entidades caracterizadas por ciertos atributos, que tienen relaciones entre sí y están localizadas en un cierto ambiente, de acuerdo con un cierto objetivo".

Una Entidad es lo que constituye la esencia de algo y por lo tanto es un concepto básico. Las entidades pueden tener una existencia concreta, si sus atributos pueden percibirse por los sentidos y por lo tanto son medibles y una existencia abstracta si sus atributos están relacionados con cualidades inherentes o propiedades de un concepto.

Los Atributos determinan las propiedades de una entidad al distinguirlas por la característica de estar presentes en una forma cuantitativa o cualitativa.

Los atributos cuantitativos tienen dos percepciones: La dimensión y la magnitud. La dimensión es una percepción que no cambia y que identifica al atributo, para lo cual se utilizan sistemas de medida basados en unidades o patrones, ejemplos de dimensión son Kg., tamaño, sexo, color, etc. La magnitud es la percepción que varía y que determina la intensidad del atributo en un instante dado de tiempo, para lo cual se utilizan escalas de medida, tales como: la nominal, la ordinal, la de intervalo y la de razón, ejemplos de magnitud son: 30 Kg., 20 empleados, etc.

Las Relaciones determinan la asociación natural entre dos o más entidades o entre sus atributos. Estas relaciones pueden ser estructurales, si tratan con la organización, configuración, estado o propiedades de elementos, partes o constituyentes de una entidad y son funcionales, si tratan con la acción propia o natural mediante la cual se le puede asignar a una entidad una actividad en base a un cierto objetivo o propósito, de acuerdo con sus aspectos formales (normas y procedimientos) y modales (criterios y evaluaciones).

El Ambiente es el conjunto de todas aquellas entidades, que al determinarse un cambio en sus atributos o relaciones pueden modificar el sistema.

El Objetivo es aquella actividad proyectada o planeada que se ha seleccionado antes de su ejecución y está basada tanto en apreciaciones subjetivas como en razonamientos técnicos de acuerdo con las características que posee el sistema.

#### Teoría General de Sistemas

La idea de la teoría general de sistemas fue desarrollada por L. Von Bertalanffy alrededor de 1930, posteriormente un grupo de personas unieron sus inquietudes en lo que se llamó la Sociedad para la Investigación de Sistemas Generales, establecidas en 1954 junto con Anatol Rapoport, Kenneth Boulding, Ralph Gerard y otros.

Al estudiar la teoría de sistemas se debe comenzar por las premisas o los supuestos subyacentes en la teoría general de los sistemas. Boulding (1964) intentó una síntesis de los supuestos subyacentes en la teoría general de los sistemas y señala cinco premisas básicas. Dichas premisas se podrían denominar igualmente postulados (P), presuposiciones o juicios de valor.

P1. El orden, la regularidad y la carencia de azar son preferibles a la carencia de orden o a la irregularidad (caos) y a la existencia de un estado aleatorio. P2. El carácter ordenado del mundo empírico hace que el mundo sea bueno, interesante y atrayente para el teórico de los sistemas. P3. Hay orden en el ordenamiento del mundo exterior o empírico (orden en segundo grado): una ley de leyes. P4. Para establecer el orden, la cuantificación y la matematización son auxiliares altamente valiosos. P5. La búsqueda de la ley y el orden implica necesariamente la búsqueda de los referentes empíricos de este orden y de esta ley.

El teórico general de sistemas no es tan sólo un investigador del orden en el orden y de las leyes de leyes; busca las materializaciones concretas y particularistas del orden abstracto y de la ley formal que descubre.

### **1.5 Mecanismos de tiempo fijo y tiempo variable**

#### Construcción del Modelo

Las tareas principales en la construcción de un modelo son:

Elección Mecanismo de avance del tiempo. Este dependerá de la aproximación elegida para describir el comportamiento del sistema. Si se eligió la aproximación de flujo físico, este diagrama de flujo podría refinarse para convertirse en el diagrama de flujo del programa. Si se siguió la aproximación de cambio de estado, el diagrama de flujo desarrollado debería describir el procedimiento que efectúa los cambios de estado en el tiempo. Otros dos factores inciden en la construcción del diagrama de flujo del programa: elegir un mecanismo de avance del tiempo y el lenguaje de programación que se seleccione. Hay fundamentalmente dos formas de considerar el avance del tiempo en un modelo de simulación:

Incrementos fijos de tiempo: se considera un • intervalo fijo de tiempo y el estado del modelo se comprueba después de transcurrido cada uno de estos incrementos constantes.

Incrementos por los eventos (N.E.T.A., Next Event • Time Advance): las comprobaciones y modificaciones de las variables afectadas se realizan sólo después de la ocurrencia de un evento. Aquí el incremento de tiempo es variable, va desde la ocurrencia de un evento a otro. El avance del tiempo de simulación depende de cuál de las aproximaciones se elija. Si se elige el incremento por eventos, el reloj se inicializa a 0, y se incrementa al siguiente tiempo en que vaya a ocurrir un suceso, en ese momento, en este momento de actualización del reloj se modifican las variables que se vean afectadas por la ocurrencia del suceso. Si por el contrario se elige un incremento de tiempo fijo, el reloj se inicia a 0 y se va actualizando cada vez que pase el incremento de tiempo fijado. En esos instantes se observará el sistema para realizar los cambios.

### **1.6 Etapas Proyecto Simulación**

#### Formulación del problema.

Otro importante aspecto abordado en la investigación es la identificación y estudio de las técnicas de integración para la formulación de las tareas docentes. Sin pretender profundizar en las complejidades que encierra una investigación pedagógica sobre el tema, a continuación se describen muy brevemente algunas técnicas utilizadas para la formulación de problemas químicos de integración estructural, que son los más importantes:

1.-Modelación. Fijado el objetivo que se persigue en la creación de un problema, inmediatamente se activan los componentes intelectuales básicos: sensaciones, percepciones, memoria,

pensamiento e imaginación. Con ellos se comienzan a dibujar en el cerebro nuevas ideas en forma de imágenes, con la necesidad de ser exteriorizadas mediante la construcción de modelos gráficos, es por ello que los elementos estructurales del problema son plasmados en el papel antes de su redacción en el formato final.

2.-Tanteo-error. Consiste en un proceso continuo de adecuación y ajuste por búsqueda y prueba de los datos y/o las incógnitas según las condiciones del problema, hasta encontrar las más adecuadas. La búsqueda puede ser de tipo inteligente o arbitrario, y en ocasiones es utilizada para modificar las condiciones y con ella reordenar los elementos estructurales. Se evidencia su utilización en el gran número de operaciones de cálculo que son realizadas, así como en tachaduras y borrones que generalmente aparecen sobre el papel del formulador.

3. Asociación por analogía. En esta técnica se hace uso de la reproducción en una primera fase. Consiste en establecer nuevos nexos entre datos e incógnitas siguiendo formatos y textos guardados en la memoria para obtener otras por medio de la innovación. Es evidente que sobre las ideas iniciales, posteriormente se introducen modificaciones, que consisten en relacionar los datos de otra forma, introducir nuevas condiciones o cambiar la forma de redactar las preguntas, para obtener al final un problema derivado, que si bien no se caracteriza por su originalidad, sí constituye una nueva tarea.

4.-Integración por inclusión. Es una técnica muy sencilla, cuyo procedimiento es asequible a cualesquier sujeto. Consiste en elaborarla de forma tal que las incógnitas de los diferentes incisos mantengan una dependencia sucesiva en forma de cadena, como el ejemplo de la página 37, donde fueron caracterizados los sistemas semiabiertos, para luego eliminar los iniciales y solo dejar la incógnita final.

5.-Reformulación. Consiste en reconstruir la estructura gramatical y de sistema mediante procesos de innovación. Se diferencia de la analogía por la profundidad de los cambios introducidos, puesto que se parte de un ejemplo concreto que debe ser modificado y no de recuerdos que pueden ser borrosos y a veces confusos.

Durante su utilización se requiere de la imaginación y el pensamiento creativo para introducir los cambios, que de forma general pueden ser:

- introducir nuevas condiciones o modificar las viejas.
- cambiar las magnitudes de los datos.
- sustituir los datos cuantitativos por cualitativos.
- incorporar datos cualitativos sobre las sustancias involucradas para su identificación.

6.-Fusión de tareas (o contenidos) auxiliares. Como parte de las estrategias de integración, la fusión de tareas docentes auxiliares constituye una de las más importantes. Es poco empleada, debido a la elevada complejidad que implica el establecimiento de relaciones múltiples entre datos e incógnitas que proceden de ejemplos diferentes, aunque también pueden ser integrados diversos contenidos previamente seleccionados, que guarden una relación directa o indirecta. Consiste en fusionar dos o más contenidos (que pueden o no proceder de otras tareas), mediante los mecanismos de la integración externa o interna, para obtener otra con un mayor nivel de complejidad. Para poner en práctica las técnicas analizadas, es necesario aclarar que casi nunca se emplean de forma aislada, más bien en forma asociada como conjunto, por ejemplo cuando se selecciona la reformulación, ella va acompañada de otras complementarias como la modelación y el tanteo-error, entre otras. Además, en su conjunto, los fundamentos teóricos estudiados sobre los

distintos tipos de tareas integradoras y las técnicas necesitan para su implementación del siguiente conjunto de requisitos

### **1.6.1 Formulación Del Problema Simulación**

Es la parte conclusiva del Planteamiento del Problema. Formular un problema es hacer una pregunta plausible e interesante preferentemente acerca de las causas, el origen, el que, el dónde, el cómo, el cuanto, que expliquen un hecho o fenómeno.

La expresión, FORMULACIÓN DEL PROBLEMA, viene de la palabra fórmula, que significa arreglo de términos de acuerdo a la relación observada entre ellos, los cuales se asocian entre sí siempre de la misma manera, según sean las leyes que rigen ese tipo de fenómenos aunque obviamente pueden cambiar las magnitudes de los términos que la conforman.

La formulación del problema debe ser clara, precisa, específica; utilizar términos y conceptos científicos que designen unívocamente a los fenómenos y procesos educativos estudiados; evitar términos vagos, imprecisos, que se presten a confusión o a interpretaciones diversas, etc.

La recolección y procesamiento de datos se refiere al uso de una gran diversidad de técnicas y herramientas que pueden ser utilizadas por el analista para desarrollar los sistemas de información, los cuales pueden ser la entrevista, la encuesta, el cuestionario, la observación, el diagrama de flujo y el diccionario de datos.

Todos estos instrumentos se aplicará en un momento en particular, con la finalidad de buscar información que será útil a una investigación en común.

En la presente investigación trata con detalle los pasos que se debe seguir en el proceso de recolección de datos, con las técnicas ya antes nombradas.

### **1.6.2 Análisis y recolección de datos**

Los analistas utilizan una variedad de métodos a fin de recopilar los datos sobre una situación existente, como entrevistas, cuestionarios, inspección de registros (revisión en el sitio) y observación.

Cada uno tiene ventajas y desventajas. Generalmente, se utilizan dos o tres para complementar el trabajo de cada una y ayudar a asegurar una investigación completa.

Las entrevistas son las técnicas más utilizadas, se utilizan para recabar información en forma verbal, a través de preguntas que propone el analista.

Quienes responden pueden ser gerentes o empleados, los cuales son usuarios actuales del sistema existente, usuarios potenciales del sistema propuesto o aquellos que proporcionarán datos o serán afectados por la aplicación propuesta. El analista puede entrevistar al personal en forma individual o en grupos, algunos analistas prefieren este método a las otras técnicas que se estudiarán más adelante. Sin embargo, las entrevistas no siempre son la mejor fuente de datos de aplicación.

#### La recolección y análisis de los datos.

Una vez reducidas las causas posibles a las más probables, hay que recopilar datos para verificar de manera fehaciente la causa real del problema.



Entre las formas de recopilar datos cabe mencionar la hoja de suma de datos, la hoja de comprobación (que es un registro gráfico para evaluación y decisión), la gráfica de situación y el diagrama de concentración (que permite visualizar las mayores concentraciones de efectos).

Para decidir el modo de recopilar los datos conviene plantearse algunas preguntas:

- \* ¿Es el objetivo de la recopilación de datos?
- \* ¿Cuáles son los datos a recopilar?
- \* ¿Ubicación tienen los puntos del proceso donde recopilar datos?
- \* ¿Quién recopilará los datos?
- \* ¿Cuándo y cuántos datos se recopilarán?
- \* ¿Qué frecuencia y duración tendrá la recopilación?

Para la recolección de datos conviene tener en cuenta algunas orientaciones como las siguientes:

- \* Describir claramente qué datos se recolectarán y cómo se hará el recuento
- \* Diseñar un formulario adecuado para registrar los datos
- \* Acordar método y formulario con recolectores
- \* Capacitar a los recolectores: por qué, cómo, cuándo, etc.
- \* Informar a los recolectores sobre los resultados del análisis.

Es importante darle a los datos una presentación adecuada para su mejor análisis y decisión. Las formas usuales de presentación más frecuentes son:

- \* Diagrama de barras.
- \* Diagrama Pareto simple.
- \* Diagrama Pareto múltiple.
- \* Diagrama de dispersión.
- \* Gráfica de sectores.

### 1.6.3 Desarrollo del modelo

Una vez definidos con exactitud los resultados que se esperan obtener del estudio, se define y construye el modelo con el cual se obtendrán los resultados deseados. En la formulación del modelo es necesario definir todas las variables que forman parte de él, sus relaciones lógicas y los diagramas de flujo que describan en forma completa el modelo.

Es importante que se definan con claridad y exactitud los datos que el modelo va a requerir para producir los resultados deseados. Con el modelo definido, el siguiente paso es decidir si se utiliza algún lenguaje como el fortran, algol, lisp, etc., o se utiliza algún paquete como Promodel, Vensim, Stella y iThink, GPSS, simula, simscript, Rockwell Arena, [Flexsim], etc., para procesarlo en la computadora y obtener los resultados deseados.

El proceso de verificación consiste en comprobar que el modelo simulado cumple con los requisitos de diseño para los que se elaboró.[2] Se trata de evaluar que el modelo se comporta de acuerdo a su diseño del modelo

### 1.6.4 Verificación y validación.

La verificación y validación del modelo se realiza en todas los niveles de modelización: Modelo conceptual, modelo lógico y un modelo de ordenador.

La verificación se centra en la consistencia interna del modelo, mientras que la validación se interesa por la correspondencia entre el modelo y la realidad.

Se dice que un modelo es válido si sus medidas de salida tienen una correspondencia Apropia con las mismas medidas en el sistema real.



### Verificación

El proceso de verificación consiste en comprobar que el modelo simulado cumple con los requisitos de diseño para los que se elaboró.

Se trata de evaluar que el modelo se comporta de acuerdo a su diseño del modelo

Verificación del programa:

La primera comprobación que debe realizarse tras la traducción del modelo es la verificación del programa de simulación. Es decir, debemos asegurarnos de que el software programado representa realmente el modelo formulado para el sistema que se desea simular.

### Validación del modelo:

Tras la comprobación del software de simulación ya se puede comprobar si el modelo representa con un nivel de confianza suficiente el sistema que se desea simular.

La validación suele ser un proceso iterativo en el que se compara el comportamiento del sistema real con el del modelo para ir refinando este último hasta llegar a la precisión necesaria en sus respuestas.

### **1.6.5 Experimentación y optimización**

El propósito último de la experimentación con el modelo es obtener información acerca del Comportamiento del sistema para que esto nos ayude en la toma de decisiones. Cuando consideramos la ejecución de un sistema se puede desear conocer cómo se comporta dicho sistema en sentido absoluto, o comparativamente, para poder contrastar varias configuraciones alternativas del sistema. O se podrían considerar dos medidas simultáneamente.

Es evidente que el número de exploraciones que se tendrían que realizar es extremadamente Largo. Hasta para los diseños de experimentos más modestos, la exploración de todas las posibles soluciones en la búsqueda de la mejor solución, no es algo factible. Se necesita una aproximación estructurada más directa para encontrar una solución que merezca la pena. Podemos considerar dos aproximaciones diferentes para abordar este problema: conjunto predeterminado de experimentos y técnicas de búsqueda de óptimos.

Conjunto de experimentos predeterminado:

Esta aproximación impone identificar factores que podrían afectar a la medida de salida y ejecutar los experimentos con los factores puestos a determinados valores. Una vez realizados los experimentos se aplicarían unas técnicas estadísticas denominadas análisis de la varianza (ANOVA), para decidir cuál o cuáles de los factores seleccionados tiene realmente algún impacto en la medida de salida. Las medidas de salida se pueden adaptar de forma que las suposiciones estadísticas de esta técnica se satisfagan de forma razonable y puedan ser aplicadas en la experimentación del modelo.

## UNIDAD 2 NÚMEROS ALEATORIOS Y PSEUDOALEATORIOS

### 2.1 Números aleatorios

Definición 1 — 1: Número aleatorio.

Un número extraído de una población probabilísticamente uniforme en el intervalo se denomina número aleatorio. En otras palabras, siempre que entonces se denomina número aleatorio.

El nombre más apropiado para los sería número aleatorio uniforme.

El valor esperado de ese número es.

Un número aleatorio es la realización de una variable aleatoria uniforme en números aleatorios

Definición 1 — 2: Números aleatorios.

Un conjunto de números se denominan aleatorios siempre que sean extraídos del vector aleatorio con función de densidad conjunta de tal forma que y es un número aleatorio para.

Es una realización de un proceso estocástico de sucesos independientes.

Cualquier subconjunto de números es también aleatorio, la aleatoriedad es un concepto perfectamente definido.

Los números aleatorios son números que deben de cumplir los requisitos de espacio equiprobable, es decir, que todo elemento tenga la misma probabilidad de ser elegido y que la elección de uno no dependa de la elección del otro. Son generados por medio de una función determinista (no aleatoria) y que aparentan ser aleatorios.

#### Generador de números aleatorios

Un generador de números cuasi-aleatorios es aquel en el cual los números obtenidos, aunque no son propiamente aleatorios en un sentido general, son estadísticamente uniformes el intervalo  $[0,1]$  y estadísticamente independientes.

#### Generadores de números aleatorios

Los métodos para generar números aleatorios involucran algún proceso físico casi aleatorio, que genera sucesiones de números aleatorios de determinada longitud. El requisito general para las sucesiones es la independencia estadística.

#### Métodos para generar números aleatorios

Básicamente existen dos formas para determinar o generar un número aleatorio usando computadores. Las técnicas más usuales se describen a continuación.

#### Dispositivos aleatorios

Son aquellos Generadores, basados en el estado del sistema, en los cuales el algoritmo mide el nivel de alguna variable estocástica del sistema de cómputo, justo en el momento de ser invocado.

Por ejemplo, el nivel de voltaje de un circuito integrado del sistema.

Aunque a primera vista es un buen generador, presenta el inconveniente de no poder asegurar que la distribución de probabilidad de la cual provienen los datos sea uniforme.

#### Bases de datos

Ello supone producir la secuencia. Un conjunto de números aleatorios, con algún procedimiento externo a la máquina, luego de lo cual la secuencia determinada será la fuente de alimentación de una base de datos.

Con este procedimiento, se logran números que provienen de una distribución uniforme y, además, a través de sucesos independientes; sin embargo, presentan un inconveniente a la vista del ingeniero: consumen recursos valiosos en el computador

Ecuaciones en diferencias y pseudoaleatoriedad.

Las ecuaciones en diferencias se emplean para construir generadores de números cuasi-aleatorios. Es decir que tales números no son verdaderamente aleatorios. La razón es que el número obtenido depende funcionalmente de algunos o todos sus predecesores

Modelo General

Sea  $y$  una secuencia de números (usualmente enteros) indexada bajo la variable independiente y gobernada por la expresión  $y_t = f(y_{t-1}, \dots, y_{t-k}) + u_t$  es una ecuación en diferencias (no necesariamente lineal ni homogénea) que quedará totalmente especificada si se determinan las condiciones de frontera, denominadas semillas del generador entonces el número aleatorio se obtiene mediante una transformación definida por:

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R} &\rightarrow [0,1] \\ Z_t &\rightarrow u_t \end{aligned}$$

Esta transformación asegura que los números  $u_t$  pertenezcan al intervalo  $[0,1]$

Un generador no lineal

La definición de generador con base en una ecuación en diferencias no restringe la función que se debe emplear; sin embargo, los estudios en el área parecen mostrar que no se requiere procedimientos complejos para obtener números aleatorios, por el contrario la sencillez es una buena tendencia en su diseño.

Comparativa de métodos de generación

MÉTODOS	VENTAJAS	DESVENTAJAS
Manuales	Fácil generación	Lentos, simples y poco prácticos
Tablas	Fácil implementación	Lentos y no reproducibles
Comp Analógica	Rápidos " verdaderos"	No reproducibles
Comp Digital	Rápidos	No son verdaderos

## 2.2 Números pseudoaleatorios: propiedades

Se llama números pseudoaleatorios a una sucesión determinística de números en el intervalo  $[0,1]$  que tiene las mismas propiedades estadísticas que una sucesión de números aleatorios. Una forma general de obtener números pseudoaleatorios es partir de una semilla de  $p$  números y aplicar una función  $d$ .

Los números pseudo-aleatorios son necesarios cuando se pone en práctica un modelo de simulación, para obtener observaciones aleatorias a partir de distribuciones de probabilidad.

Los números aleatorios generados en un inicio por una computadora casi siempre son números aleatorios enteros.

En sentido estricto, los números generados por una computadora no se deben llamar números aleatorios por que son predecibles y se pueden reproducir, dado el número aleatorio generador que se use. Por ello en ocasiones se les llama números pseudoaleatorios.

No obstante, el punto importante es que, en forma satisfactoria, hacen las veces los números aleatorios en la simulación si el método que se usa para generarlos es válido.

El procedimiento usado por una computadora para generar números aleatorios se llama generador de números aleatorios.

Un generador de números aleatorios es un algoritmo que produce secuencias de números que siguen una distribución de probabilidad específica y tienen la apariencia de aleatoriedad.

La referencia a secuencias de números aleatorios significa que el algoritmo produce muchos números aleatorios en serie.

La secuencia de números generados debe cumplir con las 2 hipótesis siguientes:

1) Distribución Uniforme

2) Independencia (no correlacionados)

Además son importantes los siguientes aspectos:

a) Las subsecuencias también deben cumplir 1) y 2)

b) deben ser secuencias largas y sin huecos (densas)

c) algoritmos rápidos y que no ocupen mucha memoria.

Los números aleatorios se pueden dividir en dos categorías principales:

° Números aleatorios enteros. Es una observación aleatoria de una distribución uniforme discretizada en el intervalo  $n, n+1, \dots$

Por lo general,  $n = 0$  ó  $1$  donde estos son valores convenientes para la mayoría de las aplicaciones.

p° Números aleatorios uniformes. Es una observación aleatoria a partir de una distribución uniforme (continua) en un intervalo  $[a, b]$ .

Propiedades mínimas que deberán satisfacer los números pseudoaleatorios:

\*Ajustarse a una distribución  $U(0,1)$ .

\*Ser estadísticamente independientes (no debe deducirse un número conociendo otros ya generados).

\*Ser reproducibles (la misma semilla debe dar la misma sucesión).

\*Ciclo repetitivo muy largo.

\*Facilidad de obtención.

\*Ocupar poca memoria.

Cualquiera que sea el método para generar números aleatorios debe satisfacer las siguientes condiciones:

Deben ser:

1. Uniformemente distribuidos
2. Estadísticamente independientes
3. Reproducibles
  
4. Sin repetición dentro de una longitud determinada de la sucesión
5. Generación a grandes velocidades
6. Requerir el mínimo de capacidad de almacenamiento

### **2.2.1 Técnicas de generación de números pseudoaleatorios**

Existen un gran número de métodos para generar los números aleatorios uniformes entre 0 y 1. Algunas formas de obtener estos números son:

- Utilizando tablas de números aleatorios.
- Utilizando calculadoras (algunas incluyen una función para generarlos ).
- Los lenguajes de programación y las hojas electrónicas incluyen una función para generarlos.
- Utilizando Generadores Congruenciales.

El método a utilizar, en sí mismo, no tiene importancia: la importancia radica en los números que genera, ya que estos números deben cumplir ciertas características para que sean validos. Dichas características son:

1. Uniformemente distribuidos.
2. Estadísticamente independientes.
3. Su media debe ser estadísticamente igual a  $1/2$ .
4. Su varianza debe ser estadísticamente igual a  $1/12$ .
5. Su periodo o ciclo de vida debe ser largo.
6. Deben ser generados a través de un método rápido.
7. Generados a través de un método que no requiera mucha capacidad de almacenamiento de la computadora.

#### **2.2.2.1 Métodos de centros al cuadrado**

El procedimiento de obtención de números con este tipo de generadores es el siguiente:

- Generar una semilla.
- Elevarla al cuadrado.
- Tomar de la parte central un conjunto de 1 dígitos que formarán el número aleatorio.
- Los k dígitos pasarán a ser la nueva semilla con el fin de repetir el proceso n ocasiones.

Por ejemplo, el fallido método del cuadrado medio es como sigue: se parte de un número de cuatro cifras y se eleva al cuadrado. De este número de ocho cifras que se obtiene, nos quedamos con las cuatro centrales y repetimos el proceso las veces que necesitemos. El problema de este

método es que puede dar ciclos muy cortos (en cualquier caso, aspiramos a lo sumo a una longitud de diez mil):

$$\begin{array}{rcl}
 3163^2 & = & 10004569 \rightarrow 45 \\
 45^2 & = & 2025 \rightarrow 20 \\
 20^2 & = & 400 \rightarrow 4 \\
 4^2 & = & 16 \rightarrow 0 \\
 0^2 & = & 0 \rightarrow 0
 \end{array}$$

A partir de aquí siempre se obtiene el valor cero.

A la vista de este ejemplo, nos planteamos unas propiedades mínimas que deberán satisfacer los números pseudoaleatorios:

- Ajustarse a una distribución  $U(0,1)$ .
- Ser estadísticamente independientes (no debe deducirse un número conociendo otros ya generados).
- Ser reproducibles (la misma semilla debe dar la misma sucesión).
- Ciclo repetitivo muy largo.
- Facilidad de obtención.
- Ocupar poca memoria.

Generación de números aleatorios

Desventaja: secuencia por lo general corta.

### 2.2.2 Métodos de congruencia multiplicativo y mixto

Hacia 1949, Lehmer introduce un método de generación de números aleatorios mediante el cual un término de la serie se obtiene como función del término inmediatamente anterior ( $x_n=f(x_{n-1})$ ).

La función aplicada es la siguiente:

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \bmod m, \quad \text{siendo } 0 \leq x_n < m \quad \forall n$$

En el generador distinguimos cuatro elementos:

- $x_0$ , es el valor inicial o semilla.
- $a$ , multiplicador, siendo  $0 \leq a < m$ .
- $c$ , incremento, siendo  $0 \leq a < m$ .
- $m$ , módulo.

Se llama periodo a la subcadena, dentro de la serie generada, en la que no hay repeticiones de números y longitud de periodo al número de elementos de dicha subcadena.

La repetición de números en la serie puede ser aleatoria, pero dado el método utilizado para la generación de las mismas, en el momento en el que se repite un valor ya empieza a repetirse todo el periodo, por lo que interesan métodos que garanticen longitudes de periodo grandes.

Tipos de generadores congruenciales lineales

Podemos distinguir dos tipos de estos generadores que se diferencian en el valor del incremento.

G.C. Multiplicativos. En ellos el incremento,  $c$ , es 0. Este tipo de generadores fueron los introducidos por Lehmer, aunque mencionó como posibilidad la idea de tomar  $c \neq 0$ .

$$x_{n+1} = ax_n \pmod{m}$$

G.C. Mixtos. En ellos el incremento es distinto de 0. Fueron introducidos por Thomson hacia 1958.

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \pmod{m}$$

Los primeros presentan la ventaja de ser más rápidos, al tener que realizar menos operaciones en el cálculo de los elementos. Sin embargo, la longitud de periodo que se alcanza en las series generadas por ellos son menores que la alcanzadas en las series generadas por los segundos.

Los valores de  $a=0$  y  $a=1$ , producen series no aleatorias.

Supongamos  $a=0$ , nos quedaría el generador de la forma  $x_{n+1} = c \pmod{m}$ , es decir, que siempre saldría la constante  $c$ .

Si  $a=1$ , el generador es  $x_{n+1} = (x_n + c) \pmod{m}$ . Desarrollando algunos de los elementos que se van obteniendo, tenemos:

$$x_1 = (x_0 + c) \pmod{m}$$

$$x_2 = (x_1 + c) \pmod{m} = ((x_0 + c) \pmod{m}) \pmod{m} = (x_0 + 2c) \pmod{m}$$

$$x_3 = (x_0 + 3c) \pmod{m}$$

Y así para todos los términos. Vamos obteniendo que un término es siempre la semilla más un múltiplo de  $c$  y todo módulo  $m$ , y esta serie no es aleatoria.

### 2.3 Pruebas de aleatoriedad

Para comprobar si los números aleatorios obtenidos cumplen las propiedades deseadas de uniformidad e independencia se deben realizar una serie de pruebas. En general, los generadores suministrados comercialmente ya han pasado por algunas de estas pruebas.

- Prueba de frecuencia.
- Pruebas de series.
- Prueba de auto correlación.
- Prueba de saltos.
- Prueba de póker.

Cuando se prueba la uniformidad las hipótesis son:

$$H_0: R_i \sim U[0, 1]$$

$$H_1: R_i \neq U[0, 1]$$



La hipótesis nula supone que la secuencia de números obtenidos está distribuida uniformemente en el intervalo  $[0,1]$ .

### 2.4 método de Montecarlo

El método de Monte Carlo es un método no determinístico o estadístico numérico usado para aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud. El método se llamó así en referencia al Casino de Montecarlo (Principado de Mónaco) por ser "la capital del juego de azar", al ser la ruleta un generador simple de números aleatorios. El nombre y el desarrollo sistemático de los métodos de Monte Carlo datan aproximadamente de 1944 y se mejoraron enormemente con el desarrollo de la computadora.

El uso de los métodos de Monte Carlo como herramienta de investigación, proviene del trabajo realizado en el desarrollo de la bomba atómica durante la segunda guerra mundial en los Álamos. Este trabajo conllevaba la simulación de problemas probabilísticos de hidrodinámica concernientes a la difusión de neutrones en el material de fusión, la cual posee un comportamiento eminentemente aleatorio. En la actualidad es parte fundamental de los algoritmos de trazado de rayos para la generación de imágenes sintéticas.

Los primeros experimentos de simulación se realizaron en el año 1940 en EEUU bajo el nombre de análisis MonteCarlo. Los pioneros fueron Von Neumann y Ulam que publicaron un artículo intitulado "The MonteCarlo method" en 1949.

El método en si ya era conocido en estadística, disciplina donde muchos problemas se resuelven utilizando muestras aleatorias (de hecho, aplicando este método).

Entonces podemos definir el método MonteCarlo como el método numérico de simulación que permite resolver problemas matemáticos mediante la simulación de variables aleatorias.

Veremos, a modo de ejemplo, como calcular una aproximación del valor  $\pi$ , mediante el método Monte Carlo (este problema tiene soluciones eficientes en forma analítica o numérica).

1) Tomamos un círculo de radio 1 centrado en el origen, sabemos que el área del cuarto de círculo inscrito en el ortante positivo es  $\pi/4$ .

2) Sorteamos puntos en el ortante positivo de lado 1 y lo hacemos obteniendo dos valores, uno para  $x$  (abscisa) y otro para  $y$  (ordenada) cada vez, obteniendo un punto  $(x,y)$ .

3) Contamos cuantos puntos de los sorteados caen dentro del área del cuarto de círculo (In) y cuántos fuera (Out), sabiendo que si  $x^2+y^2 > 1$  el punto está fuera, y si no dentro.

4) El valor estimado del área que queremos hallar es  $In/(In+Out)$ , y ese valor será aproximadamente el de  $\pi/4$ , por lo que  $\pi$  será aproximadamente igual a  $4 * In/(In+Out)$  (en este caso,  $N=In+Out$ ).

Esta forma de calcular  $\pi$  es relativamente lenta y poco precisa, pero muestra la forma de utilizar Monte Carlo, que en el caso de otras constantes es el único método disponible.

